На правах рукописи

Королёва Валерия Сергеевна

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ОТ ГОРНОГО ДАВЛЕНИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ ПРИ СВОДООБРАЗОВАНИИ

Специальность 2.1.2 – Основания и фундаменты,
подземные сооружения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2026

Работа выполнена на кафедре «Геотехника, тоннели и метрополитены» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский государственный университет путей сообщения» (ФГБОУ ВО СГУПС)

Научный руководитель: **Кузнецов Анатолий Олегович**
кандидат технических наук, доцент кафедры «Геотехника, тоннели и метрополитены» ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет путей сообщения»

Официальные оппоненты: **Зерцалов Михаил Григорьевич**
доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», кафедра «Механика грунтов и геотехника»

Чанышев Анвар Исмагилович
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБУН «Институт горного дела им Н.А. Чинакала» Сибирского отделения Российской академии наук

Ведущая организация: ФГБОУ ВО **«Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I»**

Защита состоится «___» _____ 2026 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета 72.1.003.01, созданного на базе АО «ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева» по адресу: 195220, г. Санкт-Петербург, ул. Гжатская, д. 21.
Телефон: +7 (812) 535-54-45. E-mail: vniig@vniig.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке АО «ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева» и на сайте www.vniig.rushydro.ru

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат технических наук — Татьяна Викторовна Иванова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследований. Вопросы определения давления грунта на подземные сооружения занимают центральное место в теории и практике подземного строительства. От качества решения этих вопросов зависит и безопасность ведения работ, и эксплуатационная надежность подземных сооружений, и общий социально-экономический эффект на протяжении всего их жизненного цикла.

В отечественном транспортном и гидротехническом тоннелестроении, а также в метростроении, основной расчетной схемой для определения нагрузки на подземные сооружения от горного давления является схема сводообразования, которая целиком базируется на теории М.М. Протодьяконова. Данный подход получил широкомасштабную апробацию на практике и, как любой широко применяемый метод, имеет потенциал развития.

Так, применение этой схемы для конструкций криволинейного очертания может быть усовершенствовано по сравнению с тем, как это сейчас предусмотрено нормативными документами. Это имеет значение и для расчета временной крепи при проходке выработок, и для проектирования постоянных конструкций таких сооружений, у которых ширина превышает высоту – например, односводчатые станции метрополитенов на линиях глубокого заложения или автодорожные тоннели.

Кроме того, в самой схеме сводообразования по-прежнему остаются проблемы теоретического характера, работа над которыми может быть продолжена – это, во-первых, хорошо известная проблема определения коэффициента крепости, и, во-вторых, развитие методов анализа силового взаимодействия свода обрушения с окружающим массивом.

Другой путь расчетного определения давления грунта на конструкции подземных сооружений – это численные методы, применение которых за последние два десятилетия приобрело огромный размах. В то же время, справедливо было бы сказать, что применительно к обсуждаемому классу задач верификация численных методов еще далека от завершения. Результаты численных расчетов приходится контролировать, используя и экспериментальные приемы, и упрощенные расчетные схемы, и весь имеющийся опыт проектирования.

Из сказанного вытекает, что дальнейшее теоретическое исследование схемы сводообразования является актуальной задачей.

Степень изученности темы. Среди весьма внушительного количества публикаций, посвященных горному давлению, не так много работ, где исследовалась бы расчетная схема сводообразования. Прежде всего,

это – работы В. Риттера, М.М. Протодьяконова, П.М. Цимбаревича, И.В. Баклашова и др.

В 2015 г. И.В. Баклашов писал: «*…задача сводообразования остается нерешенной до настоящего времени*». В 2023 г. вариант теоретического решения этой задачи был предложен Я.О. Стахнёвым. Это решение может быть усовершенствовано как в части его адаптации для подземных конструкций криволинейного очертания, так и в части отказа от дополнительных гипотез, введенных Я.О. Стахнёвым, за счет применения методов вариационного исчисления.

Цель работы разработка методики определения вертикальной нагрузки от горного давления на криволинейные конструкции подземных сооружений в рамках теории сводообразования на основе вариационных принципов.

Задачи исследований.

1. Решить задачу о сводообразовании в скальных грунтах в рамках расчетной схемы Риттера-Стахнёва методами вариационного исчисления.

2. Применить полученное решение к задаче о вертикальном давлении скальных грунтов на криволинейные конструкции подземных сооружений.

3. Методом характеристик теории предельного равновесия (ТПР) решить задачу о давлении дисперсных грунтов на криволинейные конструкции подземных сооружений.

4. Выполнить анализ применения численных методов к решению задач о давлении скальных и дисперсных грунтов на криволинейные конструкции подземных сооружений при сводообразовании.

5. Разработать практическую методику расчета по результатам выполненных исследований.

Объект исследования – область обрушения грунта, формирующаяся над подземными сооружениями (свод обрушения).

Предмет исследования – предельное напряженное состояние грунта на границе и внутри свода обрушения.

Научная новизна состоит в следующем.

1. Получено три новых варианта решения задачи о своде обрушения в скальных грунтах как задачи вариационного исчисления с использованием стандартных параметров прочности скального грунта.

2. Получено решение вариационной задачи о своде обрушения в скальных грунтах над подземными сооружениями криволинейного очертания.

3. Получено новое решение статики сыпучей среды задачи о своде обрушения в дисперсных грунтах над подземными сооружениями криволинейного очертания.

4. Выявлен ряд закономерностей формирования свода обрушения и изменения величины нагрузки от горного давления на криволинейные подземные сооружения в скальных и дисперсных грунтах.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что полученное решение задачи о сводообразовании базируется только на уравнении равновесия, условии прочности грунта и поиске максимума нагрузки от горного давления на конструкции подземного сооружения в скальных грунтах без привлечения дополнительных гипотез. В рамках одной расчетной схемы удалось описать потерю устойчивости и пологих сводов обрушения, работающих в основном на отрыв, и подъемистых сводов, в нижней части которых при взаимодействии с окружающим грунтом возникает распор. Теоретически установлено, что в скальных грунтах очертание свода обрушения не зависит от высоты арки криволинейного подземного сооружения. Дано решение этой же задачи для дисперсных грунтов. Установлены границы применимости двух наиболее распространенных численных методов для этого класса задач.

Практическая значимость состоит в следующем.

1. Для расчета давления скальных грунтов на подземные конструкции и для очертания свода обрушения предложены компактные замкнутые формулы, что сильно упрощает их практическое использование.

2. Установлена степень влияния подъема арки подземной конструкции на величину вертикальной нагрузки от горного давления, что позволяет обосновывать более экономичные решения конструкций подземных сооружений.

3. Предложена практическая методика расчета давления на подземные сооружения в скальных и дисперсных грунтах. В рамках этой методики устранено несоответствие, существующее в нормативных документах, между значениями высоты свода обрушения в дисперсных и полускальных грунтах.

4. Предложенная практическая методика не выходит за рамки устоявшейся концепции проектирования подземных сооружений.

Методология и методы исследований. Для решения поставленных задач использовались:

– статический анализ силового взаимодействия свода обрушения и окружающего массива с определением напряжений по границе свода;

– классические методы вариационного исчисления для отыскания экстремума функционала;

– статический метод теории предельного равновесия (ТПР) грунтов – метод характеристик;

– численные методы расчета с применением сертифицированных программных комплексов.

Положения, выносимые на защиту:

– результаты трех вариантов решения задачи о своде обрушения как задачи вариационного исчисления;

– результат решения задачи о своде обрушения, формирующемся над подземными сооружениями криволинейного очертания, в рамках теории сводообразования;

– результаты решения задачи ТПР о предельном давлении дисперсных грунтов на подземные конструкции криволинейного очертания;

– методика расчета вертикального давления от горного давления на подземные сооружения, в том числе криволинейного очертания, в скальных и дисперсных грунтах.

Степень достоверности результатов подтверждается применением апробированных методов механики грунтов, сопоставлением с результатами аналогичных исследований, а также сопоставлением с результатами, полученными по методике, которая прошла вековую апробацию при проектировании транспортных и гидротехнических тоннелей в нашей стране.

Личный вклад автора состоит в получении всех представленных аналитических решений для скальных грунтов, построении решений методом характеристик для дисперсных грунтов, получении численных решений, проведенных сопоставлениях и анализе результатов, разработке практической методики расчета.

Результаты исследований внедрены на ряде объектов, в т.ч. АО «Мосинжпроект», ООО «ПИ Бамтоннельпроект».

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семи Международных и Всероссийских конференциях, в том числе:

– XI Российско-Китайская Международная конференция «Проблемы нелинейной геомеханики на больших глубинах» (Новосибирск, СО РАН, 2023);

– Китайско-Российский форум молодых ученых в области геотехники и подземного строительства (Москва, ТАР, 2023);

– XV, XVI, XVII научно-технические конференции «Гидроэнергетика гидротехника. Новые разработки и технологии» (Санкт-Петербург, ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 2023, 2024, 2025);

– Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием «Современные методы проектирования, подземного строительства и реконструкции оснований и фундаментов (GFAC 2024)» (Санкт-Петербург, СПбГАСУ, 2024).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 11 работ, в том числе три статьи в журналах из перечня ВАК РФ и одна статья в журнале, индексируемом в МБД.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и семи приложений. Диссертация содержит 215 страниц, 98 рисунков, 17 таблиц. Список литературы насчитывает 178 наименований, в т.ч. 34 на иностранных языках.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертация соответствует пп. 2, 3 и 16 паспорта специальности 2.1.2 – Основания и фундаменты, подземные сооружения.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава начинается с общего обзора публикаций, посвященных проблеме горного давления. Указывается, что большой вклад в развитие теории горного давления внесли отечественные и зарубежные ученые – Авершин С.Г., Анциферов С.В., Баклашов И.В., Барон Л.И., Богомолов А.Н., Борисов А.А., Бренблатт Г.И., Булычёв Н.С., Васильев Л.М., Волков В.П., Голицынский Д.М., Деев П.В., Динник А.Н., Ержанов Ж.С., Ершов Л.В., Заславский Ю.З., Зерцалов М.Г., Исаков А.Л., Картозия Б.А., Кузнецов Г.Н., Кузнецов С.В., Курленя М.В., Лаббас А., Ледяев А.П., Либерман Ю.Н., Лиманов Ю.А., Литвинский Г.Г., Машуков В.И., Меркин В.Е., Миренков В.Е., Насонов Л.Н., Неверов С.А., Опарин В.Н., Панкратенко А.Н., Покровский Н.М., Протодьяконов М.М., Протодьяконов-мл М.М., Протосеня А.Г., Ревуженко А.Ф., Ремезов А.В., Руппенейт К.В., Савин Г.Н., Саммаль А.С., Серяков В.М., Слесарёв В.Д., Соколовский В.В., Стажевский С.Б., Стахнёв Я.О., Фисенко Г.Л., Фотиева Н.Н., Фрейдин А.М., Фролов Ю.С., Хан Г.Н., Храпов В.Г., Цимбаревич П.М., Чанышев А.И., Шашенко А.Н., Шемякин Е.И., Fenner R., Ketter F., Lyamin A.V., Ritter W., Wang X.B., Wittke W., Yansen и многие другие.

Среди огромного количества исследований по горному давлению особое место занимает теория сводообразования проф. М.М. Протодьяконова. Эта теория получила широчайшее практическое применение в нашей стране, сделавшись за примерно 100 лет основной теоретической базой в метро- и тоннелестроении (в транспортном и в гидротехническом). В основе этой теории лежит понятие коэффициента крепости f – условной величины, которая характеризует в целом устойчивость грунта над выработкой, определяет размеры свода обрушения и, соответственно, нагрузку на конструкции тоннелей. Однако значение коэффициента крепости по сей день или принимается по описанию грунта (по шкале М.М.

Протодьяконова), или рассчитывается по эмпирическим формулам, прямо адресующим к этой же шкале.

Во втором параграфе первой главы диссертации анализируются основные положения нормативных методик, основанных на теории сводообразования, а также подробно описывается ряд теоретических решений задачи об устойчивости свода обрушения.

Отмечается, что впервые задача о своде обрушения была рассмотрена В. Риттером в 1879 году, т.е. еще до появления работ М.М. Протодьяконова. В своем решении В. Риттер применил аппарат вариационного исчисления. В результате им были установлены очертание свода обрушения и величина вертикальной силы горного давления на крепь тоннеля. В то же время в решении В. Риттера есть три проблемы: во-первых, по контуру свода обрушения не учитывались касательные напряжения; во-вторых, описание прочности скального грунта сводилось лишь к одной величине – прочности на одноосное растяжение; в-третьих, при проецировании на вертикальную ось сил сопротивления грунта был использован прием, прямо противоречащий правилам векторной алгебры.

Эти недостатки были устранены в решении Я.О. Стахнёва (2023), который выполнил статический анализ устойчивости свода обрушения на базе паспорта прочности скального грунта. Вместе с тем, Я.О. Стахнёву пришлось ввести в решение две дополнительные гипотезы. В результате было дано теоретическое обоснование коэффициента крепости *f*, а также получен целый ряд интересных результатов.

Отдельной проблемой, требующей, как оказалось, иных подходов, является задача о сводообразовании в дисперсных грунтах. Обзор решений этой задачи также приводится в диссертации.

В третьем параграфе дается краткое описание численных методов, использованных в диссертационном исследовании – это метод конечных элементов (МКЭ), метод придельного анализа (МПА), разработанный S.W. Sloan и A.V. Lyamin, и метод характеристик теории предельного равновесия (ТПР) грунтов. Указывается, что в последние десятилетия развернулась широкомасштабная апробация численных методов применительно к самым различным задачам подземного строительства. Однако этот процесс далек от завершения, и на повестке дня остается весьма объемная задача дальнейшей апробации численных методов, установления границ их применимости и их корректной адаптации к задачам подземного строительства.

В четвертом параграфе дан обзор решений задач устойчивости дисперсных грунтовых массивов с позиций вариационного исчисления. Это, прежде всего, решения Ю.И. Соловьева, М.Н. Гольдштейна, А.Г. Дорфмана, А.В. Жабко, а также решения А.М. Караулова и Кан Тхэ Сана,

которые успешно применяли для решения этого класса задач методы линейного программирования.

В выводах первой главы на основе выполненного обзора литературы формулируются задачи исследований.

Вторая глава посвящена постановке и решению классической задачи сводообразования в скальных грунтах как задачи вариационного исчисления. Эти решения необходимы для рассмотрения основной задачи диссертации – о горном давлении на криволинейные подземные конструкции.

Общая схема решения. На рис. 1, *а*, показана основная схема теории сводообразования (схема Протодьяконова-Цимбаревича), а на рис. 1, *б*, – симметричная расчетная схема свода обрушения (схема Риттера-Стахнёва). Здесь растягивающие напряжения положительны.

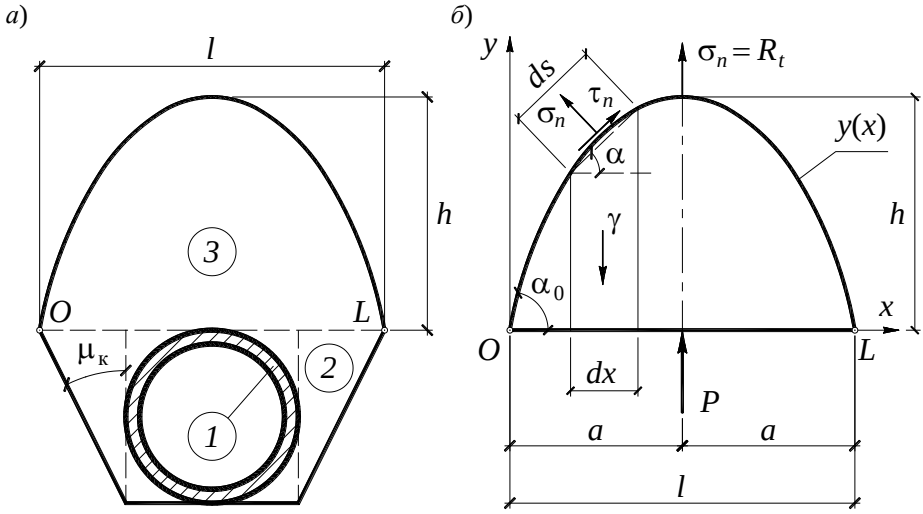


Рис. 1. Основная схема теории сводообразования (*а*)
и расчетная схема свода обрушения (*б*):
1 – подземное сооружение; *2* – боковые призмы обрушения; *3* – свод обрушения

Контур свода обрушения сверху описывается функцией $y(x)$, заранее неизвестной, а снизу – отрезком OL длиной $l = 2a$, ниже которого находится подземное сооружение (подземная выработка).

Свод стремится обрушиться в выработку под действием собственного веса. Обрушению препятствуют силы сопротивления грунта по контуру свода, которые в каждой точке контура с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$ характеризуются нормальными и касательными напряжениями – σ_n и τ_n. Можно предположить, что в верхней точке: $\sigma_n = R_t$, $\tau_n = 0$, где R_t – прочность на одноосное растяжение.

Если вес свода окажется больше, чем суммарное сопротивление грунта обрушению, то для удержания его в равновесии необходимо по границе *OL* приложить дополнительную удерживающую силу *P*. Эта сила может рассматриваться как равнодействующая вертикального давления свода обрушения на конструкции подземного сооружения.

Основное уравнение плоской задачи теории сводообразования. Из равновесия на вертикальную ось *Oy*:

$$P = G - \Sigma R, \tag{1}$$

где G – вес свода обрушения, ΣR – проекция на ось *Oy* суммы сил сопротивления грунта по контуру свода.

Учитывая симметрию расчетной схемы, имеем:

$$\frac{1}{2}G = \int_0^a \gamma y dx, \qquad \frac{1}{2}\Sigma R = \int_0^{s/2} \sigma_n \cos\alpha + \tau_n \sin\alpha ds, \tag{2}$$

где γ – удельный вес грунта; s – длина контура свода.

Ясно, что $\operatorname{tg}\alpha = dy/dx \equiv y'$ и $ds = dx / \cos\alpha$. Тогда, подставив равенства (2) в (1), получим уравнение равновесия свода обрушения

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \gamma y - \sigma_n - y'\tau_n dx. \tag{3}$$

Поскольку напряжения σ_n и τ_n по контуру свода являются предельными, то их можно связать огибающей предельных кругов Мора из паспорта прочности скального грунта (рис. 2). Такая огибающая может быть аппроксимирована различными функциями. В диссертации принята функция, предложенная Я.О. Стахнёвым:

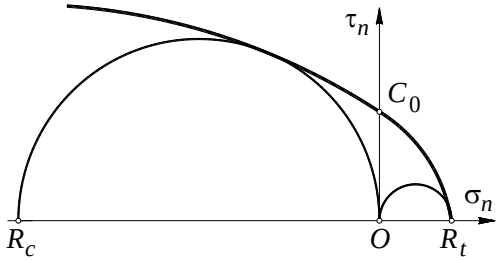


Рис. 2. Паспорт прочности скального грунта

$$\tau_n = C_0\left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m, \tag{4}$$

где C_0 и m – параметры огибающей, вычисляемые по результатам испытаний грунта на прочность.

Подставив (4) в (3), получим *основное уравнение плоской задачи теории сводообразования*:

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \gamma y - \sigma_n - y'C_0\left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m dx. \tag{5}$$

Цель решения состоит в поиске максимума силы P, которая зависит от неизвестных функций $y(x)$ и $\sigma_n(x)$. Таким образом, имеем классическую задачу вариационного исчисления – поиск экстремума функционала (5).

Три варианта решения основного уравнения. Несколько иначе эту задачу впервые сформулировал Я.О. Стахнёв, который дал ее приближенное решение. Упрощение состояло в том, что им были введены две дополнительные гипотезы относительно функций $y(x)$ и $\sigma_n(x)$:

$$y(x) = \frac{hx}{a^2}(2a - x) \qquad \text{и} \qquad \sigma_n(x) = R_t \cos\alpha\,, \tag{6}$$

где h – высота свода обрушения (см. рис. 1, *б*), определяемая из условия максимизации силы P.

Я.О. Стахнёвым была составлена система уравнений (1), (2), (4) и (6), которую он привел к уравнению зависимости силы P от высоты свода h. Это позволило свести задачу к поиску максимума функции $P(h)$.

Собственно уравнение (5) Я.О. Стахнёвым не рассматривалось (по-видимому, равенство (5) в качестве основного уравнения плоской задачи теории сводообразования впервые было сформулировано в настоящей работе). Другим важным обстоятельством является то, что гипотезы (6) накладывают весьма существенные ограничения на решение.

Итак, в настоящей работе была поставлена и решена задача поиска экстремума функционала P при последовательном отказе от гипотез (6).

Поскольку основной инструмент для поиска экстремума функционала (5) – это уравнения Эйлера, то полученные решения условно названы «Эйлер – 1», «Эйлер – 2» и «Эйлер – 3» (рис. 3).



Рис. 3. Три варианта решения задачи о сводообразовании

В тексте диссертации подробно описан ход решения в каждом из вариантов. Здесь приведем только самые основные формулы.

Введем обозначение для подынтегрального выражения в (5):

$$F = \gamma y - \sigma_n - y' C_0 \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m . \qquad (7)$$

Решение «Эйлер – 1». Осуществляется поиск экстремума функционала (5) от неизвестной функции $y(x)$, а функция $\sigma_n(x)$ определяется вторым из уравнений (6). В этом случае подынтегральное выражение F зависит от y и y', но не содержит явно x, и решение находится с помощью уравнения Эйлера, которое для $F(y, y')$ имеет вид:

$$F - y' F'_{y'} = C_1 , \qquad (8)$$

где $F'_{y'} \equiv \partial F / \partial y'$ – частная производная; C_1 – постоянная интегрирования.

В результате получено очертание свода в параметрическом виде:

$$y(\alpha) = \frac{C_1}{\gamma} + \frac{R_t}{\gamma}\cos^3\alpha(1 + 2\mathrm{tg}^2\alpha) - \frac{C_0 m}{\gamma}\sin^3\alpha(1 - \cos\alpha)^{m-1}, \qquad (9)$$

$$x(\alpha) = a + \frac{R_t}{\gamma}\sin\alpha\cos^2\alpha - \frac{C_0(1-\cos\alpha)^m}{\gamma}\left[m\cos\alpha(\cos\alpha + 1) + 1\right],$$

где α – параметр (его геометрический смысл – см. рис. 1, *б*).

Постоянная интегрирования вычисляется по формуле:

$$C_1 = -R_t \cos^3\alpha_0(1 + 2\mathrm{tg}^2\alpha_0) + C_0 m \sin^3\alpha_0(1 - \cos\alpha_0)^{m-1},$$

где α_0 – значение угла α в точке O (см. рис. 1, *б*), которое находится из решения трансцендентного уравнения $x(\alpha_0) = 0$.

При подстановке выражений $x(\alpha)$ и $y(\alpha)$ в выражение (5) получаем

$$P = 2\int_{\alpha_0}^{0} \gamma y(\alpha) x'(\alpha) - \frac{R_t x'(\alpha)}{\sqrt{1 + f(\alpha)^2}} - C_0 y'(\alpha)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + f(\alpha)^2}}\right)^m d\alpha . \qquad (10)$$

Здесь обозначено: $y'(\alpha) = dy(\alpha)/d\alpha$; $x'(\alpha) = dx(\alpha)/d\alpha$; $f(\alpha) = y'(\alpha)/x'(\alpha)$.

Решение «Эйлер – 2». Здесь требуется найти $\max P[\sigma_n(x), x]$. Контур свода задан первым из уравнений (6), в котором h – неизвестная величина. Искомая функция $\sigma_n(x)$ находится из решения уравнения Эйлера:

$$F'_\sigma - \frac{d}{dx} F'_{\sigma'} = 0 , \qquad (11)$$

где $F_\sigma' \equiv \partial F / \partial \sigma_n$; $F'_{\sigma'} \equiv \partial F / \partial \sigma_n'$.

В результате получено уравнение для напряжений

$$\sigma_n = R_t \left\{1 - \left[\frac{a^2 R_t}{2h(a-x)C_0 m}\right]^{\frac{1}{m-1}}\right\}. \qquad (12)$$

Подстановка выражения (12) в (5) даст

$$P(h)=2\cdot\int_0^a\left\{\frac{\gamma hx}{a^2}(2a-x)-R_t+R_t\frac{m-1}{m}\left[\frac{a^2R_t}{2h(a-x)C_0m}\right]^{\frac{1}{m-1}}\right\}dx\,, \qquad (13)$$

после чего осуществляется поиск максимума функции $P(h)$.

Решение «Эйлер – 3». В этом решении ставится задача поиска экстремума функционала $P[y(x),\sigma_n(x),x]$, определяемого основным уравнением (5) без привлечения дополнительных гипотез. Эта цель достигается решением системы из двух уравнений Эйлера:

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0\,; \qquad F'_\sigma-\frac{d}{dx}F'_{\sigma'}=0\,. \qquad (14)$$

Здесь обозначения производных аналогичны описанным выше.

В результате были найдены искомые функции:

$$\sigma_n=R_t\left\{1-\left[\frac{\gamma}{C_0}\cdot(a-x)\right]^{\frac{1}{m}}\right\}; \quad y=\frac{R_t}{\gamma}\cdot\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\left[a^{\frac{1}{m}}-(a-x)^{\frac{1}{m}}\right]. \qquad (15)$$

Подстановка (15) в (5) приводит к весьма компактному уравнению:

$$P=2R_ta\left[\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\frac{m}{1+m}-1\right]. \qquad (16)$$

Анализ результатов выполнялся в относительных переменных: $\gamma=1$ – единица объёмного веса, $a=1$ – единица длины. Соответственно, γa – единица напряжений. В условии прочности (4) приняты следующие значения характеристик:

$$R_t=-0{,}1R_c\,, \qquad C_0=-0{,}25R_c\,, \qquad m=0{,}44\,. \qquad (17)$$

Сравнение трех вариантов решения. В полном тексте диссертации приводятся графики функций $P(R_c)$, рассчитанных по формулам (10), (13) и (16). Анализ поведения этих графиков показал следующее. Решение «Эйлер – 1» имеет ограничение области определения вследствие принятия в качестве гипотезы второго из равенств (6). Решение «Эйлер – 2» дает близкие результаты с «Эйлер – 3» при m = 0,44, однако гипотеза, представленная первым из равенств (6), не позволяет в решении «Эйлер – 2» учесть влияние параметра m на очертание свода.

Таким образом, наиболее полным ожидаемо является решение «Эйлер – 3», которое и принято для дальнейшего анализа.

Анализ функций $y(x)$ и $\sigma_n(x)$. На рис. 4 даны графики функций $y(x)$ и $\sigma_n(x)$, рассчитанных по формулам (15). Для $m = 0{,}44$ контур свода, как сказано выше, близок к параболе. Непосредственно из (15) следует, что $y(x)$ будет квадратной параболой при $m = 0{,}5$, но при $m \to 0$ и при $m \to 1$ очертания свода становятся качественно иными. Другой важный результат – это появление сжимающих напряжений ($\sigma_n < 0$) в нижней части свода, когда свод становится достаточно подъемистым (рис. 4, *б*). Для параметров прочности (17) такая ситуация, т.е. распор, возникает при $R_c \le 4$.

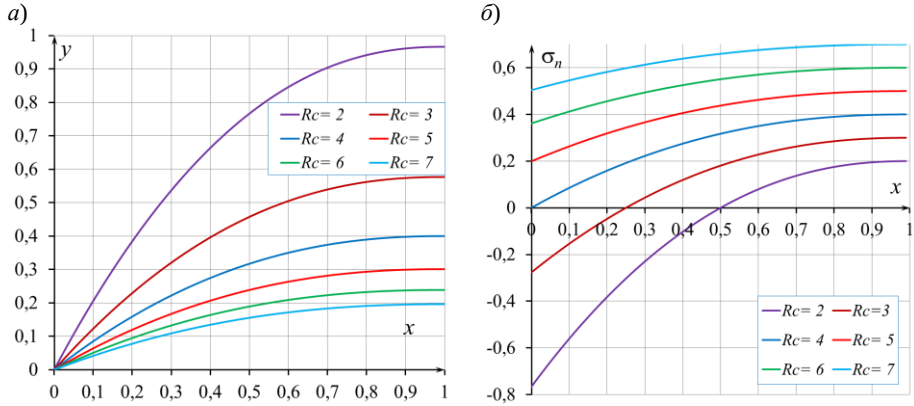


Рис. 4. Некоторые результаты решения «Эйлер – 3» для разных R_c:
а – очертания $y(x)$ контуров свода обрушения;
б – распределение напряжений $\sigma_n(x)$ по контуру свода

Анализ влияния параметра m. В тексте диссертации даются графики зависимостей $P(R_c)$, $y(x)$ и $\sigma_n(x)$ при различных значениях параметра m.

Показано, что при $m \to 1$ график $P(R_c)$ становится линейным, свод обрушения приобретает форму треугольника, а прочность R_c перестает оказывать влияние на функцию $y(x)$. При $m \to 0$ очертания сводов обрушения становятся трапецеидальными с закругленными углами, а влияние прочности R_c на высоту h свода обрушения резко возрастает.

Особенности решения при m = 1. Если во второй из формул (15) положить $x = a$, то получим $C_0/R_t = a/h$. По определению коэффициента крепости $f = a/h$, и, следовательно, $f = C_0/R_t$. С другой стороны, при $m = 1$ условие прочности (4) переходит в классический закон Кулона, а множитель при σ_n становится равен C_0/R_t, т.е. $C_0/R_t = \operatorname{tg}\varphi$. Отсюда $f = \operatorname{tg}\varphi$.

Равенство $f = \operatorname{tg}\varphi$ впервые было получено М.М. Протодьяконовым на основании совершенно иных рассуждений (в 1-й главе диссертации эти рассуждения приводятся). На наш взгляд, это равенство представляет

больше теоретический интерес, поскольку предполагает работу грунта на растяжение, в то же время случай $m = 1$ характерен, скорее, для дисперсных грунтов, на растяжение практически не работающих.

В завершении этого блока ($m = 1$) в тексте диссертации анализируется влияние параметров C_0 и φ на величину P.

О критических пролетах. Результаты полученных решений свидетельствуют о существовании критического пролета $l_{кр1}$, который разграничивает две принципиально различные ситуации: если $l > l_{кр1}$, то для обеспечения устойчивости свода обрушения требуется удерживающая сила ($P > 0$); если $l \le l_{кр1}$, то устойчивость грунта над выработкой обеспечена, а нарушение устойчивости требует приложения специальных усилий ($P < 0$). Детальный анализ значений $l_{кр1}$ и сопоставление с уже известными исследованиями этого вопроса дан в тексте диссертации.

Сравнение с известными решениями. В тексте диссертации дается сопоставление зависимостей $P(R_c)$ и $h(R_c)$, рассчитанных по формулам «Эйлер – 3», с результатами В. Риттера и Я.О. Стахнёва (как наиболее близкими по постановке). Графики, полученные тремя указанными способами, в целом коррелируют между собой, особенно с увеличением R_c. Однако важно отметить, что решение Я.О. Стахнёва имеет ограниченную область определения вследствие принятия гипотез (6), а в решении В. Риттера фигурирует только одна прочностная характеристика грунта – R_t. В то же время решение «Эйлер – 3» свободно от дополнительных гипотез (кроме собственно гипотезы сводообразования и гипотезы о предельном состоянии грунта по всему контуру свода) и базируется на паспорте прочности скального грунта (см. рис. 2), причем условие прочности может быть описано не только функцией (4), но иметь и другой вид.

Сопоставление с численными методами завершает 2-ю главу. Проанализировано соотношение зависимостей $P(R_c)$, вычисленных по формуле (16), с результатами, полученными методом конечных элементов (МКЭ) с помощью ПК *MIDAS GTS NX* и *PLAXIS 2D* и методом предельного анализа (МПА) с помощью ПК *Optum G2*. При построении численных решений МКЭ и МПА использовалось условие прочности *Hoek-Brown*. Параметры условия *Hoek-Brown* и условия прочности (4) подбирались так, чтобы оба критерия прочности давали идентичные кривые $\sigma_1(\sigma_3)$.

Показано, что, во-первых, решение данной задачи МКЭ нестабильно и может приводить к противоречивым оценкам P; во-вторых, МПА дает результаты, близкие к решению «Эйлер – 3». Последнее обстоятельство можно рассматривать как своего рода взаимную верификацию двух разных подходов к анализу данной задачи – МПА и аналитического решения.

В третьей главе дан статический анализ устойчивости свода обрушения, который формируется в скальных и дисперсных грунтах над широкими подземными сооружениями с верхними несущими конструкциями криволинейного очертания. Частным случаем таких сооружений является крепь калотты.

Под широкими подземными сооружениями здесь понимаются сооружения, у которых ширина больше высоты настолько, что можно пренебречь боковыми призмами обрушения (см. рис. 1, *а*, поз. *2*). Отметим, что СП 120.13330 и СП 122.13330 оговаривают ситуацию, когда боковое давление на выработку отсутствует. Эта ситуация также означает отсутствие боковых призм и подходит под предлагаемые далее решения.

Постановка и решение задачи в скальных грунтах. На рис. 5, *а*, показана общая схема свода обрушения над криволинейным подземным сооружением. В грунтовом массиве *1* устраивается подземное сооружение *3* шириной *OL*, над которым формируется свод обрушения *2*.

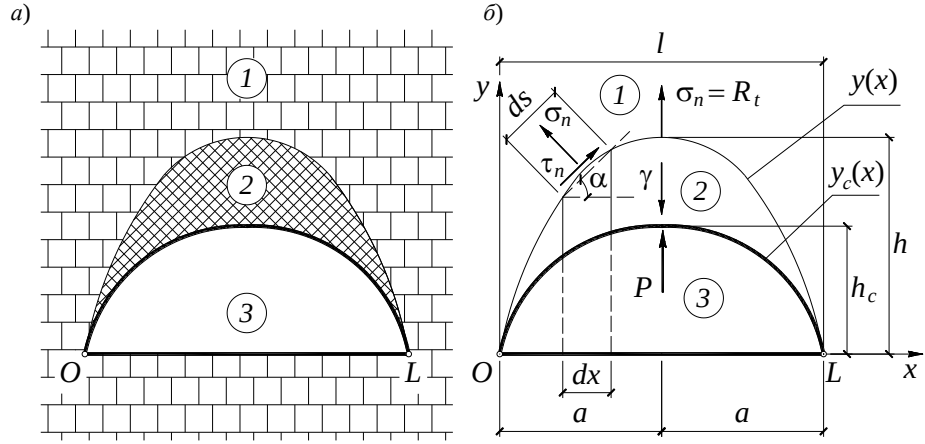


Рис. 5. Принципиальная (*а*) и расчетная (*б*) схемы задачи о сводообразовании над криволинейными подземными сооружениями:
1 – грунтовый массив, *2* – свод обрушения, *3* – калотта или подземное сооружение

Расчетная схема показана на рис. 5, *б*. Контур подземного сооружения описывается наперед заданной функцией $y_c(x)$, его высота обозначена как h_c. Остальные обозначения сохранены (см. рис. 1, *б*).

Отличием данного решения от решения «Эйлер – 3», принятого здесь в качестве базового, будет выражение для собственного веса свода:

$$\frac{1}{2}G = \int_0^a \gamma \cdot [y(x) - y_c(x)]dx\,. \qquad (18)$$

В соответствии с этим основное уравнение теории сводообразования для случая криволинейных подземных сооружений примет вид:

$$\frac{1}{2}P=\int_0^a \gamma(y-y_c)-\sigma_n-y'C_0\left(1-\frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m dx\,. \qquad (19)$$

Цель решения – поиск экстремума функционала P, зависящего от неизвестных функций $y(x)$ и $\sigma_n(x)$.

Функции $y(x)$ и $\sigma_n(x)$ находятся из решения системы уравнений Эйлера (14). Здесь подынтегральное выражение функционала P будет отличаться от (7) только слагаемым γy_c, которое пропадает при дифференцировании в уравнениях (14). Поэтому искомые функции $y(x)$ и $\sigma_n(x)$ совпадают с (15), а выражение для P примет вид:

$$P=2R_t a\left[\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\frac{m}{m+1}-1\right]-G_c\,, \qquad (20)$$

где G_c – вес грунта в области, ограниченной кривой $y_c(x)$ и отрезком OL.

Для определенности примем очертание подземного сооружения подобным очертанию свода обрушения: $y_c = h_c\{1 - [(a - x)/a]^{1/m}\}$. Тогда

$$P=2R_t a\left[\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\frac{m}{m+1}-1\right]-\frac{2\gamma h_c a}{1+m}\,. \qquad (21)$$

Некоторые промежуточные выводы:

– для широких подземных сооружений контур $y(x)$ свода обрушения и распределение напряжений $\sigma_n(x)$ по контуру не зависят от очертания верхней конструкции этого сооружения, если $y_c(x) < y(x)$;

– сила P предельного давления на крепь широких выработок уменьшается на величину веса G_c грунта, вынутого при разработке, по сравнению с силой, действующей на выработку с «прямым потолком»;

– если контур подземного сооружения повторяет контур свода обрушения, то такая конфигурация будет иметь определенный запас.

Анализ результатов, как и ранее, будем вести в относительных переменных для параметров прочности (17).

На рис. 6, *а*, показаны графики $P(R_c)$ для различных значений m при h_c = const = 0,1, а на рис. 6, *б*, – графики $P(R_c)$ для различных значений h_c при m = const = 0,44. Качественно эти графики повторяют поведение функций $P(R_c)$ из 2-й главы, однако имеют ограниченную область определения, поскольку в задаче принято, что $y_c(x) \le y(x)$, следовательно, $h_c \le h$.

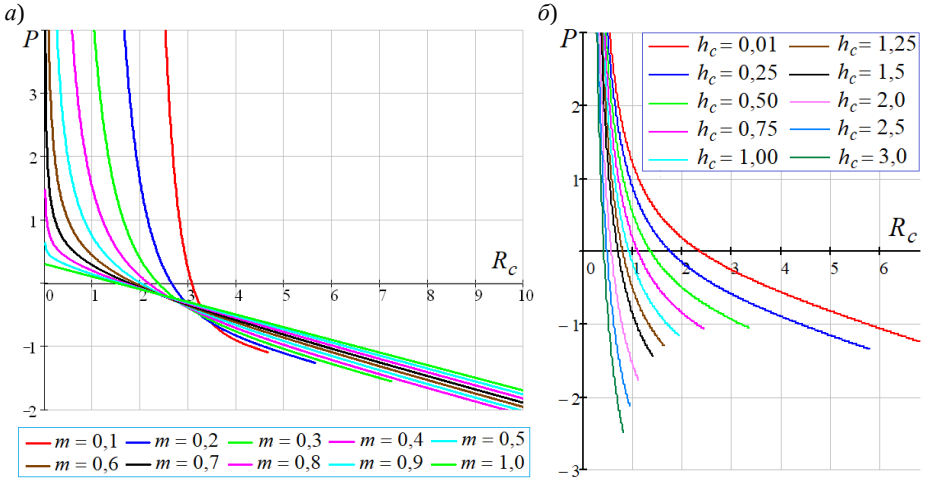


Рис. 6. Графики зависимостей $P(R_c)$ для $h_c = 0{,}1$ (*а*) и для $m = 0{,}44$ (*б*)

В скальных грунтах малой прочности ($R_c < 2{,}37$ – см. рис. 6, *б*), когда при $h_c = 0$ требуется удерживающая сила $P > 0$ для обеспечения устойчивости свода, можно из ф-лы (21) подобрать такую высоту h_c подъема сооружения, при которой $P = 0$, т.е. свод переходит в устойчивое состояние.

В полном тексте диссертации также приводится анализ зависимостей $P(R_c)$ и $P(h_c)$, рассчитанных при $h_c = h$. Это – ситуация гарантированной устойчивости свода. При этом установлено, что существуют такие значения R_c, при которых этот запас устойчивости минимален.

Постановка и решение задачи в дисперсных грунтах. Решение задачи об устойчивости свода обрушения в дисперсных грунтах осуществлялось методом характеристик ТПР грунтов. Здесь этот метод выбран потому, что дисперсные грунты практически не работают на растяжение, а в предыдущих решениях ключевую роль играли как раз растягивающие напряжения.

Постановка плоской задачи ТПР имеет вид (в координатах *xOz*):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma;$$

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau^2_{xz}} = (\sigma_x + \sigma_z + 2c \cdot \operatorname{ctg}\varphi)\sin\varphi,$$

где φ и c – угол внутреннего трения и удельное сцепление грунта.

В основе решения лежит идея, выдвинутая Я.О. Стахнёвым, о принципиальном сходстве между поведением грунта за подпорной стенкой и поведением грунта за крепью подземных сооружений.

На рис. 7, *а*, показана левая половина симметричной расчетной схемы, где римскими цифрами указаны номера краевых задач. Отличие от решения Я.О. Стахнёва состоит в очертании границы «свод обрушения – конструкция»: здесь эта граница криволинейна, что и составляет основную трудность при построении решения. Техника решения подробно описана в полном тексте диссертации.

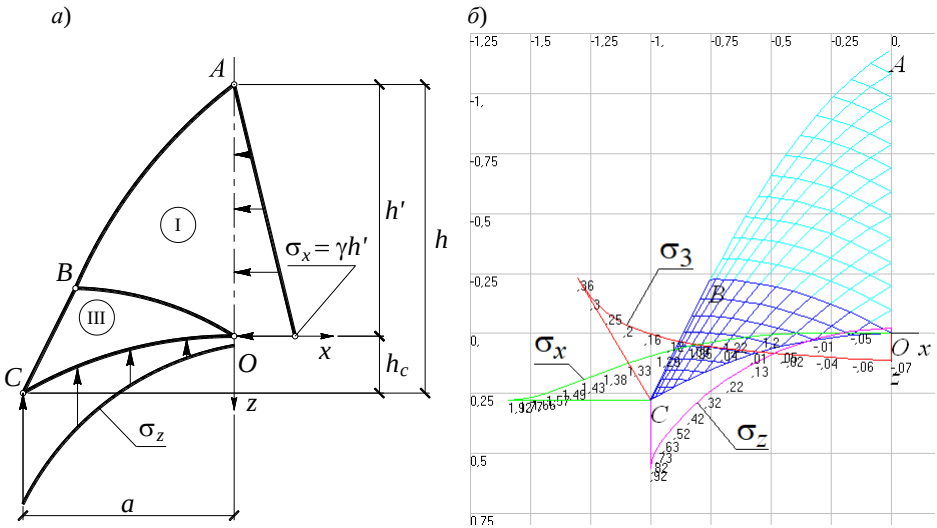


Рис. 7. Левая половина симметричной расчетной схемы (*а*) и рассчитанный пример сетки линий скольжения (характеристик) с эпюрами напряжений σ_x, σ_z и σ_3 (*б*)

На рис. 7, *б*, показан пример сетки линий скольжения и эпюры напряжений σ_x, σ_z и σ_3 для следующих исходных данных (в относительных переменных): $\gamma = 1$, $a = 1$, $\varphi = 30°$, $c = 0{,}40$, $r_c = 1{,}95$, $h' = 1{,}181$, $h_c = 0{,}277$, $P = 0{,}0207$. Здесь r_c – радиус кругового очертания подземного сооружения; величины h' и h_c – см. рис. 7, *а*. Высота свода обрушения, как и ранее, равна $h = h_c + h'$.

Анализ результатов данного решения для дисперсных грунтов, среди прочего, показал три важных отличия от результатов, полученных для скальных грунтов.

Первое. В скальных грунтах свод обрушения имеет гладкое очертание, а в дисперсных грунтах – очертание стрельчатой арки (см. рис. 7, *б*). Отельного внимания заслуживают формы эпюр контактных напряжений: они свидетельствуют о том, что разрушение прогрессирует от края выработки к центру. Это согласуется с данными схожих исследований – эксперименты ИГД им. Н.А. Чинакала СО РАН, решения Я.О. Стахнёва и др.

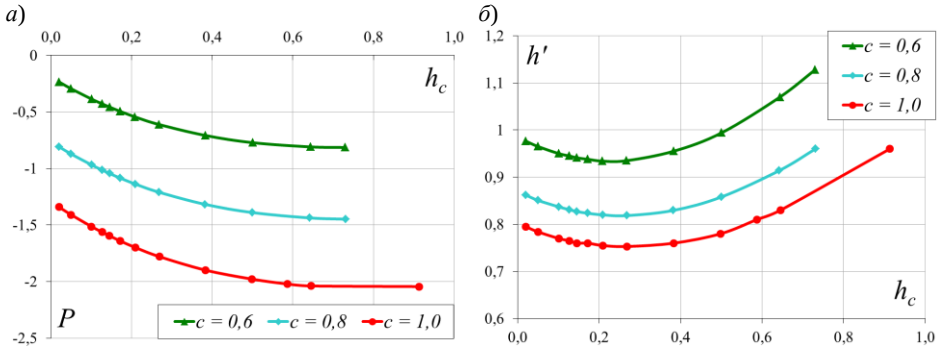


Рис. 8. К анализу результатов решения задачи о своде в дисперсных грунтах (φ = 30°): *а* – графики зависимости $P(h_c)$; *б* – графики зависимости $h'(h_c)$

Второе. В скальных грунтах функции $P(h_c)$ при m = const убывают, причем линейно – см. ф-лу (21). В дисперсных грунтах функции $P(h_c)$ убывают нелинейно и только на начальном интервале h_c, а затем выполаживаются (рис. 8, *а*). Что касается среднего (по контуру конструкции) давления p, то функции $p(h_c)$ имеют ярко выраженный минимум почти для всех практически значимых значений φ и c. Соответствующие графики приводятся в полном тексте диссертации.

Третье. В скальных грунтах контур свода обрушения не зависит от очертания сооружения. В дисперсных грунтах имеет место выраженная зависимость высоты h' от h_c и, следовательно, высоты h свода обрушения от h_c. Более того, функция $h'(h_c)$ имеет минимум (рис. 8, *б*). Это объясняется малой прочностью дисперсных грунтов и фактическим отсутствием у них способности сопротивляться растяжению.

Содержание **четвертой главы** составляют разработка и обоснование практической методики расчета вертикальной нагрузки от горного давления на криволинейные конструкции подземных сооружений.

Сопоставление с численным решениями показало, что теоретические значения и значения, полученные МПА, в целом, хорошо согласуются между собой. В то же время МКЭ зачастую показывает нестабильные результаты. Это относится и к скальным, и к дисперсным грунтам.

Сопоставление с опытными данными, полученными и опубликованными «Ленметрогипротранс», показало хорошую сходимость результатов измерений с результатами решений, разработанными в диссертации. Методики СП 122.13330 и СНиП II-44-78 дают бóльшее расхождение.

Сопоставление с нормативными методиками, в т.ч. с применением формулы Л.И. Барона, показало, что предлагаемые решения позволяют устранить основное противоречие в методиках СП 102, СП 120 и СП 122

относительно соотношения значений (f = 0,6…1,0) для дисперсных грунтов и формулой $f = R_c/10$ для скальных при $R_c < 10$ МПа.

Разработанные практические рекомендации включают в себя две различные схемы – классическая схема (см. рис. 1, *а*) и схема для подземных сооружений с криволинейным очертанием (см. рис. 5, *а*). По первой схеме на подземное сооружение действуют и вертикальные, и горизонтальные нагрузки; по второй – только вертикальные. Обе схемы конкретизированы для скальных грунтов (полностью дан формульный аппарат) и для дисперсных грунтов (составлены таблицы значений h для практически значимого диапазона значений φ, с и h_c).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Решена задача о сводообразовании в рамках расчетной схемы Риттера-Стахнёва как задачи вариационного исчисления. Результат решения дан в виде замкнутых формул. Выявлен ряд закономерностей влияния прочностных параметров скального грунта на очертание сводов обрушения и силу предельного давления грунта на подземные сооружения. Дано аналитическое подтверждение равенства коэффициента трения и коэффициента крепости в дисперсных грунтах, которое впервые было установлено М.М. Протодьяконовым другим способом.

2. Сформулирована и решена задача о сводообразовании над криволинейными конструкциями подземных сооружений (например, калотта). Показано, что очертание свода обрушения и распределение нормальных напряжений по контуру свода не зависят от высоты калотты. При этом сила горного давления на крепь уменьшается на величину веса грунта, вынутого при разработке калотты. Установлен ряд других зависимостей силы предельного давления от прочности грунта и высоты калотты.

3. Методом характеристик ТПР решена задача о сводообразовании в дисперсных грунтах. Показан качественно иной характер зависимости высоты свода обрушения над калоттой от высоты калотты. Исследовано влияние прочностных характеристик и высоты калотты на среднее предельное давление грунта на подземное сооружение, его равнодействующую, высоту свода обрушения.

4. Выполнена взаимная верификация результатов аналитических решений и численного моделирования. В задаче о своде в скальных грунтах показано хорошее соответствие аналитических решений с результатами МПА. Расхождение с МПА фиксируется лишь при $R_c < 1…2$. МКЭ демонстрирует неустойчивость решения в этом классе задач. Что касается дисперсных грунтов, то в целом ситуация повторяется – хорошее соответ-

ствие аналитики методу предельного анализа (МПА) и нестабильность результатов МКЭ. Отметим, что наложение сеток линий скольжения на эпюры γ_{max}, построенные МПА, также показали хорошее соответствие.

5. Предложена практическая методика сбора нагрузок от грунта на конструкции подземных сооружений. Эта методика была разработана на основе выполненных сопоставлений с численными решениями, с данными натурных исследований на реальных объектах, а также на основе сопоставления с нормативной методикой и шкалой М.М. Протодьяконова. По результатам этих сопоставлений для практического использования в полученные теоретические решения внесены соответствующие поправки. Общая концепция практической методики состоит в том, что рассматриваются четыре основных случая: сбор нагрузок в скальных грунтах, которые оказывают и вертикальное и горизонтальное давление на сооружение, сбор нагрузок в скальных грунтах, которые оказывают только вертикальное давление, сбор нагрузок в дисперсных грунтах на постоянные конструкции и сбор нагрузок в дисперсных грунтах на временную крепь калотты или на конструкции иных сооружений, у которых ширина значительно превышает высоту.

Диссертация соответствует пп. 2, 3 и 16 направления исследований паспорта специальности 2.1.2 – Основания и фундаменты, подземные сооружения.

Направления дальнейших исследований

1. Применить методы вариационного исчисления к другим задачам теории устойчивости грунтов.
2. Исследовать задачу об устойчивости свода обрушения в пространственной постановке.

Список публикаций автора по теме диссертации

По теме диссертации автором опубликовано 11 печатных работ:

I. Публикации в журналах, рекомендованных ВАК РФ для опубликования материалов диссертаций

1. **Макарова (Королёва), В.С**. Решение задачи о сводообразовании в скальных грунтах методом вариационного исчисления / В.С. Макарова (Королёва), К.В. Королев, А.О. Кузнецов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2024. – № 2. – С. 2-8. – EDN CKGAHB.

2. Королев, К. В. Статическое решение задачи о предельном равновесии свода обрушения в скальных грунтах / К. В. Королев, А. О. Кузнецов, Т. В. Иванова, **В. С. Макарова (Королёва)** // Известия Всероссийского научно-

исследовательского института гидротехники им. Б.Е. Веденеева. – 2024. – Т. 313. – С. 90-105. – EDN SHGDWE.

3. Королев, К.В. Задача о предельном равновесии свода обрушения над подземными сооружениями криволинейного очертания и ее практическое применение / К.В. Королев, **В.С. Макарова (Королёва)**, А.О. Кузнецов, А.М. Караулов // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. – 2025. – № 1 (73). – С. 77-86. – DOI 10.52170/1815-9265_2025_73_77. – EDN KTXDTS.

II. Публикации в зарубежных и российских журналах, входящих в международные реферативные базы данных цитирования (Scopus)

4. **Makarova (Koroleva), V.S.**, Korolev, K.V., Kuznetsov, A.O. Variational solutions for the problem of arching in rock soils. Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2024. Vol. 61 (2). pp 91-98. – DOI 10.1007/s11204-024-09948-w. – EDN EYWXUH.

III. Статьи в научных журналах, сборниках научных трудов и материалов научно-практических конференций

5. **Макарова (Королёва), В.С.** Определение давления скального грунта на крепь калотты / **В.С. Макарова**, А.О. Кузнецов, К.В. Королев / В сборнике: Гидроэнергетика. Гидротехника. Новые разработки и технологии: тезисы докладов пятнадцатой научно-технической конференции. – Санкт-Петербург: АО «ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева», 2023. – С. 104-105.

6. **Макарова (Королёва), В.С.** Решение задачи о равновесии свода обрушения над калоттой в скальных грунтах / **В.С. Макарова (Королёва)** / В сборнике: Использование современных моделей в механике грунтов, геотехнических расчетах и фундаментостроении: материалы 2-й междунар. науч.-техн. конф. памяти профессора Д. М. Шапиро / Отв. ред. М. С. Ким. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2023. – С. 43-47. – EDN MKUHGY.

7. **Макарова (Королёва), В.С.** Практическая методика расчета нагрузки от горного давления на подземные сооружения в скальных и дисперсных грунтах / **В.С. Макарова (Королёва)** // В сборнике: Современные методы проектирования, подземного строительства и реконструкции оснований и фундаментов (GFAC 2024) : Сборник тезисов Национальной (всероссийской) научно-технической конференции с международным участием, посвященной 90-летию кафедры геотехники (механики грунтов, оснований и фундаментов, инженерной геологии) / Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет. – Санкт-Петербург : СПбГАСУ, 2024. – С. 20-21. – EDN FCEZTO.

8. **Макарова (Королёва), В.С.** Вариационное решение задачи о сводообразовании над калоттой в подземных выработках / **В.С. Макарова (Королёва)**, А.О. Кузнецов // В сборнике: Гидроэнергетика. Гидротехника. Новые разработки и технологии : тезисы докладов шестнадцатой научно-технической конференции. – Санкт-Петербург: АО «ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева», 2024. – С. 150-152.

9. **Макарова (Королёва), В.С.** Об одном варианте решения задачи устойчивости свода обрушения над выработкой как вариационной задачи / **В.С. Мака-**

рова (Королёва), К.В. Королев, А.О. Кузнецов / В сборнике: Фундаменты глубокого заложения и проблемы геотехники территорий : материалы III Всерос. конф. с междунар. участием (г. Пермь, 29–31 мая 2024 г.) / Под общ. ред. В.Г. Офрихтера; ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет». – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2024. – С. 346-359. – EDN YXENBN.

10. Бурдин, Т.В. Постановка и пример решения задачи об активном давлении грунта как задачи вариационного исчисления / Т.В. Бурдин, С.А. Калинин, К.В. Королев, **В.С. Макарова (Королёва)** // В сборнике: Фундаменты глубокого заложения и проблемы геотехники территорий : материалы III Всерос. конф. с междунар. участием (г. Пермь, 29–31 мая 2024 г.) / под общ. ред. В.Г. Офрихтера; ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет». – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2024. – С. 335-345. – EDN GNVPEE.

11. **Королёва (Макарова), В.С.** Расчет горного давления на криволинейные конструкции подземных сооружений в дисперсных грунтах // В сборнике: Гидроэнергетика. Гидротехника. Новые разработки и технологии : тезисы докладов семнадцатой научно-технической конференции. – Санкт-Петербург: АО «ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева», 2025. С. 131-132.

Королёва Валерия Сергеевна

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ОТ ГОРНОГО ДАВЛЕНИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ ПРИ СВОДООБРАЗОВАНИИ

Специальность 2.1.2 – Основания и фундаменты, подземные сооружения (технические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук